Shadowing properties of hyperbolic homeomorphisms (Unsolved Problems and its Progress in General・Geometric Topology)

酒井, 一博

数理解析研究所講究録
1107 巻 1999 年 16-23

Shadowing properties of hyperbolic homeomorphisms

神奈川大学工学部 酒 井 一 博 (Sakai, Kazuhiro)

コンパクト距離空間 (X, d) 上の位相同相写像を $f : X \to X$ $(f(X) = X)$ とする．点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}} \subset X$ が f の δ-**擬軌道** (pseudo-orbit) $(\delta > 0)$ であるとは，$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ $(i \in \mathbf{Z})$ を満たすときをいう．f が**擬軌道尾行性** (shadowing property) ([1]) をもつとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ があって, どんな δ-擬軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ に対しても $d(f^i(y), x_i) < \varepsilon$ $(i \in \mathbf{Z})$ を満たす $y \in X$ が存在するときをいう (擬軌道尾行性は擬軌道追跡性 (pseudo-orbit tracing property) とも呼ばれている．例えば [5] を参照)．擬軌道尾行性は位相的な性質である．すなわち，d と同値な距離 d' に関しても（定数等は変わるかも知れないが）その性質は成立する．擬軌道尾行性の概念は現代力学系理論の中の様々な分野において頻繁に登場し，特に力学系の安定性やエルゴード理論の研究において重要な役割を果たしている．

最近，確率的力学系理論の研究において登場してくる概念にリプシッツ擬軌道尾行性がある．f が **リプシッツ擬軌道尾行性** (Lipschitz shadowing property) (例えば [4] または [7] を参照) をもつとは，定数 $L > 0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在して，任意の ε-擬軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}}$ $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ に対し $d(f^i(y), x_i) < L\varepsilon$ $(i \in \mathbf{Z})$ を満たす $y \in X$ が存在するときをいう．リプシッツ擬軌道尾行性は擬軌道尾行性よりも強い概念である．しかし，推移位相同相写像 (shift homeomorphism) のように，いくつかの位相力学系理論の研究対象においては，上記２つの概念が一致するものも知られている．この論文では，コンパクト距離空間上の拡大的位相同相写像に対し次の定理を示す．

定理 ([11])．拡大的位相同相写像 $f : (X, d) \to (X, d)$ に対し，次は同値．

(i) f は擬軌道尾行性をもつ,

(ii) ある同値な距離 D が存在して，f は D に関してリプシッツ擬軌道尾行性をもつ．

位相同相写像 $f : (X, d) \to (X, d)$ が **拡大的** (expansive) であるとは，ある正の定数 e (拡大定数) があって $d(f^n(x), f^n(y)) \leq e$ $(n \in \mathbf{Z})$ ならば $x = y$ が成り立つときをいう．拡大性も位相的な性質である．拡大性と擬軌道尾行性を合わせもつ位相同相写像は，**双曲的位相同相写像** (hyperbolic homeomorphism) と呼ばれている．

上で述べたようにリプシッツ擬軌道尾行性は，一般に擬軌道尾行性よりも強い．

例 1. $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とし，$\pi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を標準射影とする．任意の点 $\mathbf{x} = x + \mathbf{Z}$,

$\mathbf{y} = y + \mathbf{Z} \in S^1$ $(x, y \in \mathbf{R})$ に対し，S^1 上の距離を $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{|x - y + n| : n \in \mathbf{Z}\}$ とする．位相同相写像 $f : S^1 \to S^1$ の周期点集合は空でない有限集合で，すべての周期点は位相的に双曲型とする（定義については [12, Definition 6] を参照）．さらに $\mathbf{o} = 0 + \mathbf{Z} \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ は f の不動点とし，点 $\mathbf{o}$ の S^1 における十分小さな近傍 $U(\mathbf{o})$ においては $f(\mathbf{x}) = x + x^2 sgn(x) + \mathbf{Z}$ $(\mathbf{x} = x + \mathbf{Z} \in U(\mathbf{o}), d(\mathbf{x}, \mathbf{o}) = |x|)$ とする．ここで，$sgn(x)$ は x の正負を表す．このとき f は距離 d に関してはリプシッツ擬軌道尾行性をもたない．実際，f が d に関しリプシッツ擬軌道尾行性をもつと仮定する．$L, \varepsilon > 0$ はリプシッツ擬軌道尾行性の定義のものとし，任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ $(L\varepsilon \ll 1)$ を固定する．点列 $\mathbf{x}_i = x_i + \mathbf{Z} \in U(\mathbf{o})$ は $d(\mathbf{x}_i, \mathbf{o}) = x_i = \varepsilon$ $(i \in \mathbf{Z})$ を満たすものとすると

$$d(f(\mathbf{x}_i), \mathbf{x}_{i+1}) = |\varepsilon + \varepsilon^2 - \varepsilon| = \varepsilon^2.$$

ゆえに $\{\mathbf{x}_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ は f の ε^2-擬軌道．従って $d(f^i(\mathbf{y}), \mathbf{x}_i) < \varepsilon^2 L$ $(\forall i \in \mathbf{Z})$ を満たす $\mathbf{y} \in S^1$ が存在する．f の定義より，明らかに $\mathbf{y} = \mathbf{o}$.

$$\varepsilon = d(\mathbf{o}, \mathbf{x}_i) = d(f^i(\mathbf{o}), \mathbf{x}_i) = d(f^i(\mathbf{y}), \mathbf{x}_i) < \varepsilon^2 L$$

より $\varepsilon < \varepsilon^2 L$. 従って，$1 < \varepsilon L$. これは矛盾である．

一方，[12, Proof of Theorem 1] より，Morse-Smale 微分同相写像 $g : S^1 \to S^1$ が存在して $f : S^1 \to S^1$ と位相共役．すなわち，位相同相 $h : S^1 \to S^1$ が存在して $h \circ f = g \circ h$ が成立する．Morse-Smale 微分同相写像 g が擬軌道尾行性をもつ ([5]) ことより，f は (d に関し) 擬軌道尾行性をもつことが確かめられる．

擬軌道尾行性は距離の選び方に関係しないが，リプシッツ擬軌道尾行性は距離の選び方に関係する．

例 2. $f, g, h : (S^1, d) \to (S^1, d)$ は例 1 のものとする．f は d に関してはリプシッツ擬軌道尾行性はもたないが，Morse-Smale 微分同相写像 g はリプシッツ擬軌道尾行性をもつ ([7])．そこで d と同値な S^1 上の距離 D を

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(h(\mathbf{x}), h(\mathbf{y})) \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S^1)$$

により定義すると，$g : (S^1, d) \to (S^1, d)$ がリプシッツ擬軌道尾行性をもつことから f は D に関しリプシッツ擬軌道尾行性をもつことが確かめられる．

(注). M^2 を 2 次元コンパクトリーマン多様体とし，d をリーマン計量から導かれる M^2 上の距離として固定する．このとき M^2 上の Axiom A を満たす微分同相写像に対しては，(微分可能力学系理論の立場において) 擬軌道尾行性とリプシッツ擬軌道尾行性はそれぞれ以下のように特徴付けされている．Axiom A を満たす微

分同相写像全体を $\mathcal{A}(M^2)$ で表す．$f \in \mathcal{A}(M^2)$ に対し，次が成立する．

(1) f が擬軌道尾行性をもつことと f が C^0 横断性条件を満たすことは同値 ([10]),

(2) f がリプシッツ擬軌道尾行性をもつことと f が 強横断性条件 (strong transversality condition) ([5]) を満たすことは同値 ([7]).

ここで，f が C^0 横断性条件を満たすとは, 粗く言えば，f の任意の安定多様体が不安定多様体を位相的に横断することである (定義については [10] または [7] を参照).

(注) で述べたように，微分可能力学系理論の立場では擬軌道尾行性とリプシッツ擬軌道尾行性の間に違いが認められる．しかし，例 2 から推測されるように，位相力学系理論の立場においてはこれらの概念は同値であることが予想される．

問題. (X, d) をコンパクト距離空間とする．位相同相写像 $f : X \to X$ が擬軌道尾行性をもてば，ある同値な距離 D が存在して $f : (X, D) \to (X, D)$ はリプシッツ擬軌道尾行性をもつか？

我々の定理はこの問題に対する部分的な結果である．以下，定理の証明を与える．

f をコンパクト距離空間 (X, d) 上の位相同相写像とする．$\varepsilon > 0$ に対し，f の点 x における 局所安定集合，局所不安定集合 をそれぞれ

$$W^s_\varepsilon(x, d) = \{y \in X : d(f^n(x), f^n(y)) \le \varepsilon \quad (\forall n \ge 0)\},$$

$$W^u_\varepsilon(x, d) = \{y \in X : d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \le \varepsilon \quad (\forall n \ge 0)\}$$

と定義する．

補題 1. $f : (X, d) \to (X, d)$ をコンパクト距離空間上の拡大的位相同相写像とする．このとき X 上の距離 D と定数 $0 < \varepsilon_0, 0 < \mu < 1$ が存在し，f と f^{-1} が共にリプシッツ条件を満たし，かつすべての $x \in X$ と $n \ge 0$ に対し

$$\begin{cases} D(f^n(x), f^n(y)) \le \mu^n D(x, y) & (\forall y \in W^s_{\varepsilon_0}(x, D)) \\ D(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \le \mu^n D(x, y) & (\forall y \in W^u_{\varepsilon_0}(x, D)). \end{cases}$$

証明. 拡大定数を $e > 0$ とし，積空間 $X \times X$ の対角線集合 Δ の閉近傍列 $\{W_n\}_{n=0}^\infty$ $(W_0 = X \times X)$ を次のように定義する．

$$W_n = \{(x, y) \in X \times X : d(f^j(x), f^j(y)) \le e \quad (-n < \forall j < n)\} \quad (n \ge 1).$$

このとき $\bigcap_{n=0}^\infty W_n = \Delta$ ([8, Lemma 1]). 定数 $N > 1$ を [8, p.207] のようにとり，新しく閉近傍列 $\{V_k\}_{k=0}^\infty$ を $V_0 = W_0$, $V_k = W_{1+(k-1)N}$ $(k \ge 1)$ と定義すると，[8,

Lemma 3] より X 上の距離 D が存在して

$$V_k \subset \{(x,y) \in X \times X : D(x,y) < 1/2^k\} \subset V_{k-1} \quad (k \geq 1)$$

が成立.

定数 $L = \max\{1, \mathrm{diam}_D(X)\}$ に対し $K^N = 2^4 L$ とおく. ここで $\mathrm{diam}_D(X) = \sup\{D(x,y) : x, y \in X\}$. もし $(x,y) \notin V_3$ ならば $D(x,y) \geq 1/2^4$ より

$$\max\{D(f^N(x), f^N(y)), D(f^{-N}(x), f^{-N}(y))\} \leq L \leq K^N D(x,y).$$

もし $(x,y) \in V_k \setminus V_{k+1}$ $(k \geq 3)$ ならば $D(x,y) \geq 1/2^{k+2}$. さらに $(x,y) \in V_k = W_{1+(k-1)N}$ より $(f^N(x), f^N(y)), (f^{-N}(x), f^{-N}(y)) \in V_{k-1}$. ゆえに

$$\max\{D(f^N(x), f^N(y)), D(f^{-N}(x), f^{-N}(y))\} < \frac{1}{2^{k-1}} < 2^4 D(x,y).$$

従って, 任意の $x, y \in X$ に対し $\max\{D(f^N(x), f^N(y)), D(f^{-N}(x), f^{-N}(y))\} \leq K^N D(x,y)$.

定数 $\nu > 0$ を [8, p.208] のように選べば, すべての $x \in X$ に対し

$$(*) \qquad \begin{cases} D(f^{3N}(x), f^{3N}(y)) \leq \frac{1}{2} D(x,y) & (\forall y \in W^s_\nu(x, D)) \\ D(f^{-3N}(x), f^{-3N}(y)) \leq \frac{1}{2} D(x,y) & (\forall y \in W^u_\nu(x, D)) \end{cases}$$

([8, Proposition]).

[9, Proof of Theorem] で用いた方法を 2 回使うことにより結論を導く. X 上の距離 ρ を

$$\rho(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{K^i} D(f^i(x), f^i(y)) \quad (\forall x, y \in X)$$

と定義すると, $D(f^N(x), f^N(y)) \leq K^N D(x,y)$ より $\rho(f(x), f(y)) \leq K\rho(x,y)$ $(x, y \in X)$. さらに, $D(f^{-N}(x), f^{-N}(y)) \leq K^N D(x,y)$ $(\forall x, y \in X)$ より

$$\rho(f^{-N}(x), f^{-N}(y)) \leq K^N \rho(x,y) \quad (\forall x, y \in X).$$

次に

$$D'(x,y) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{K^i} \rho(f^{-i}(x), f^{-i}(y)) \quad (\forall x, y \in X)$$

と定義すると $D'(f(x), f(y)) \leq KD'(x,y)$. $\rho(f^{-N}(x), f^{-N}(y)) \leq K^N \rho(x,y)$ より $D'(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq KD'(x,y)$. よって f, f^{-1} は D' に関し共にリプシッツ条件を満たす. f と f^{-1} の一様連続性より, $D'(x,y) < \delta$ $(x, y \in X)$ ならば $D'(f^i(x), f^i(y)) < \nu$ $(-N \leq \forall i \leq N)$ が成立するように $\delta > 0$ を十分小さくとることができる. $(*)$ より, すべての $x \in X$ に対し, $y \in W^s_\delta(x, D')$ ならば $D'(f^{3N}(x), f^{3N}(y)) \leq \frac{1}{2} D'(x,y)$. さらに, $y \in W^u_\delta(x, D')$ ならば

$$D'(f^{-3N}(x), f^{-3N}(y)) \leq \frac{1}{2} D'(x,y).$$

D' を用いて目的の距離 D'' を構成しよう．まず $\mu^{3N}=\frac{1}{2}$ とおき X 上の距離 ρ' を

$$\rho'(x,y)=\sum_{i=0}^{3N-1}\frac{1}{\mu^i}D'(f^i(x),f^i(y)) \quad (\forall x,y\in X)$$

と定義する．f と f^{-1} は ρ' に関してもリプシッツ条件をみたすことは簡単に確かめられる．さらに，すべての $x\in X$ に対し $\rho'(f(x),f(y))\le\mu\rho'(x,y)$ $(\forall y\in W^s_\delta(x,D'))$. 次に $0<\varepsilon_0<\delta$ を $D'(x,y)<\varepsilon_0$ $(x,y\in X)$ ならば $D'(f^i(x),f^i(y))\le\delta$ $(-3N\le\forall i\le 3N)$ を満たすように固定する．よって，すべての $x\in X$ に対し $\rho'(f^{-3N}(x),f^{-3N}(y))\le\frac{1}{2}\rho'(x,y)$ $(\forall y\in W^u_{\varepsilon_0}(x,D'))$. 最後に X 上の距離 D'' を

$$D''(x,y)=\sum_{i=0}^{3N-1}\frac{1}{\mu^i}\rho'(f^{-i}(x),f^{-i}(y)) \quad (\forall x,y\in X)$$

とする．このとき f と f^{-1} は D'' に関してリプシッツ条件を満たし，かつ ($\varepsilon_0<\delta$ より) すべての $x\in X$ に対し $D''(f^{-1}(x),f^{-1}(y))\le\mu D''(x,y)$ $(\forall y\in W^u_{\varepsilon_0}(x,D'))$. さらに ε_0 の選び方により，すべての $x\in X$ に対し $D''(f(x),f(y))\le\mu D''(x,y)$ $(\forall y\in W^s_{\varepsilon_0}(x,D'))$. 明らかに，$D''(x,y)<\varepsilon_0$ $(x,y\in X)$ ならば $D'(x,y)<\varepsilon_0$. 従って，すべての x と $\sigma=s,u$ に対し $W^\sigma_{\varepsilon_0}(x,D'')\subset W^\sigma_{\varepsilon_0}(x,D')$. D'' を D で表せば結論を得る．

補題 2．補題 1 の条件と仮定のもと，さらに f に擬軌道尾行性を仮定する．このとき，定数 $A,\varepsilon_0>0$ が存在して，すべての $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ に対し，$\delta>0$ があって

(i) $D(x,y)<\delta$ $(x,y\in X)$ ならば $r(x,y)=W^u_\varepsilon(x,D)\bigcap W^s_\varepsilon(y,D)$: 1 点,

(ii) $D(r(x,y),x)\le AD(x,y)$, $D(r(x,y),y)\le AD(x,y)$.

証明. 拡大的位相同相写像 $f:X\to X$ が擬軌道尾行性をもつとし，$D, 0<\varepsilon_0,\mu<1$ は補題 1 で得られたものとする．距離 D に関する f と f^{-1} のリプシッツ定数は $K>1$，また（必要ならばさらに小さくとって）ε_0 は f の拡大定数としてよい．ゆえに任意の $0<\varepsilon\le\varepsilon_0/2$ に対し，$0<\delta\le\varepsilon$ が存在し，$D(x,y)<\delta$ $(x,y\in X)$ ならば $r(x,y)=W^u_\varepsilon(x,D)\bigcap W^s_\varepsilon(y,D)$ は 1 点であることが確かめられる．すべての $x\in X$ と $n\ge 0$ に対し

$$\begin{cases} D(f^n(x),f^n(y))\le\mu^n D(x,y) & (\forall y\in W^s_{\varepsilon_0}(x,D)) \\ D(f^{-n}(x),f^{-n}(y))\le\mu^n D(x,y) & (\forall y\in W^u_{\varepsilon_0}(x,D)) \end{cases}$$

であった．定数 $\delta=\delta(\varepsilon_0/2)>0$ は上のものとし，かつ $D(x,y)\le\delta_1$ $(x,y\in X)$ ならば $r(x,y)\in f^{-1}(W^u_{\varepsilon_0}(f(x),D))\cap f(W^s_{\varepsilon_0}(f^{-1}(y),D))$ を満たすように $0<\delta_1\le\delta$ を小さく選ぶ．任意の $x,y\in X$ $(D(x,y)<\delta_1)$ を固定したとき

- $D(x,r(x,y))\ge D(y,r(x,y))$ の場合：

δ_1 の選びかたより $\frac{1}{\mu}D(x,r(x,y))\le D(f(x),f(r(x,y)))$ かつ

$$D(f(y),f(r(x,y)))\le\mu D(y,r(x,y)).$$

$D(f(x), f(r(x,y))) \le D(f(x), f(y)) + D(f(y), f(r(x,y)))$ より $\frac{1}{\mu}D(x, r(x,y)) \le D(f(x), f(y)) + \mu D(y, r(x,y))$ が成り立つ．$D(x, r(x,y)) \ge D(y, r(x,y))$ より

$$(\frac{1}{\mu} - \mu)D(x, r(x,y)) \le D(f(x), f(y))$$

を得る．よって $D(x, r(x,y)) \le \frac{\mu}{1-\mu^2}D(f(x), f(y))$. 従って

$$\max\{D(x, r(x,y)), D(y, r(x,y))\} \le \frac{K\mu}{1-\mu^2}D(x,y).$$

- $D(x, r(x,y)) \le D(y, r(x,y))$ の場合：

明らかに $D(f^{-1}(y), f^{-1}(r(x,y))) \le D(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) + D(f^{-1}(x), f^{-1}(r(x,y)))$. $\frac{1}{\mu}D(y, r(x,y)) \le D(f^{-1}(y), f^{-1}(r(x,y)))$ と

$$D(f^{-1}(x), f^{-1}(r(x,y))) \le \mu D(x, r(x,y))$$

より $(\frac{1}{\mu} - \mu)D(y, r(x,y)) \le D(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$. よって

$$\max\{D(x, r(x,y)), D(y, r(x,y))\} \le \frac{K\mu}{1-\mu^2}D(x,y).$$

コンパクト距離空間 (X,d) 上の拡大的位相同相 $f: X \to X$ に対し，f が (d に関し) **リプシッツ標準座標系** (Lipschitz canonical coordinates) をもつとは，定数 $L, \varepsilon_0 > 0$ が存在して，すべての $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ に対し，$d(x,y) < \varepsilon$ $(x, y \in X)$ ならば $W^u_{L\varepsilon}(x,d) \bigcap W^s_{L\varepsilon}(y,d) \ne \emptyset$ が成立することをいう．リプシッツ標準座標系が**双曲的** (hyperbolic) であるとは，定数 $0 < \varepsilon_0, \mu < 1$ が存在して，すべての $x \in X$ と $n > 0$ に対し

$$\begin{cases} d(f^n(x), f^n(y)) \le \mu^n d(x,y) & (\forall y \in W^s_{\varepsilon_0}(x,d)) \\ d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \le \mu^n d(x,y) & (\forall y \in W^u_{\varepsilon_0}(x,d)) \end{cases}$$

が成立するときをいう．

補題１，２より，定理 ((i) ならば (ii)) を証明するには, 次の命題を証明すれば十分.

命題. コンパクト距離空間 (X,D) 上の位相同相写像 $f: (X,D) \to (X,D)$ は拡大的とし，f はリプシッツ条件を満たすとする．もし f が (D に関し) 双曲的リプシッツ標準座標系をもてば，f はリプシッツ擬軌道尾行性をもつ.

証明. 定数 L, ε_0 は双曲的リプシッツ標準座標系の定義のものとする．すべての $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ に対し，$D(x,y) < \varepsilon$ $(x, y \in X)$ ならば

$$r(x,y) = W^u_{L\varepsilon}(x,D) \bigcap W^s_{L\varepsilon}(y,D)$$

は1点であるとしてよい．$\mu^n L < 1$ を満たす $n > 0$ を固定する．f がリプシッツ条件を満たすことより，f^n についてリプシッツ擬軌道尾行性を示せば f もリプシッツ擬軌道尾行性をもつことがわかる．簡単のために $W^u_\varepsilon(x,D)$, $W^s_\varepsilon(x,D)$, μ^n, f^n をそれぞれ $W^u_\varepsilon(x)$, $W^s_\varepsilon(x)$, μ, f で表す．

$\{x_i\}_{i=0}^k$ $(k>0)$ を f の与えられた ε-擬軌道 $(0<\varepsilon<(1-\mu L)\varepsilon_0)$ とし，$L' = \frac{L}{(1-\mu L)(1-\mu)} + \frac{1}{1-\mu L}$ とおく．ここでは $k=4$ に対し，$y \in X$ が存在して $D(f^i(y), x_i) < L'\varepsilon$ $(0 \le \forall i \le k)$ が成り立つことを示す（他の場合も同様）．$\sum_{i=0}^n (\mu L)^i$ を ν_n で表し，$\nu_\infty = \lim_{n\to\infty} \nu_n$ とおく．さらに $L' = L(\sum_{i=0}^\infty \mu^i)\nu_\infty + \nu_\infty$ とおく．x_4 を y_0 で表すと，$D(f(x_3), y_0) < \varepsilon$ より

$$r(f(x_3), y_0) \in W^u_{L\varepsilon}(f(x_3)) \bigcap W^s_{L\varepsilon}(y_0).$$

$D(f(x_2), x_3) < \varepsilon$ より $y_1 = f^{-1}(r(f(x_3), y_0)) \in W^u_{\mu L\varepsilon}(x_3)$ とおけば $d(f(x_2), y_1) < \nu_1\varepsilon < \varepsilon_0$.

$$r(f(x_2), y_1) \in W^u_{L\nu_1\varepsilon}(f(x_2)) \bigcap W^s_{L\nu_1\varepsilon}(y_1)$$

に対し，$y_2 = f^{-1}(r(f(x_2), y_1)) \in W^u_{\mu L\nu_1\varepsilon}(x_2)$ とおけば $D(f(x_1), y_2) < \nu_2\varepsilon < \varepsilon_0$ ($D(f(x_1), x_2) < \varepsilon$ に注意)．$r(f(x_1), y_2) \in W^u_{L\nu_2\varepsilon}(f(x_1)) \cap W^s_{L\nu_2\varepsilon}(y_2)$ を選び

$$y_3 = f^{-1}(r(f(x_1), y_2)) \in W^u_{\mu L\nu_2\varepsilon}(x_1)$$

とおく．$D(f(x_0), x_1) < \varepsilon$ であるから $D(f(x_0), y_3) < \nu_3\varepsilon < \varepsilon_0$．よって

$$r(f(x_0), y_3) \in W^u_{L\nu_3\varepsilon}(f(x_0)) \bigcap W^s_{L\nu_3\varepsilon}(y_3).$$

明らかに $y_4 = f^{-1}(r(f(x_0), y_3)) \in W^u_{\mu L\nu_3\varepsilon}(x_0)$.

さて，y_4 を y で表すと $D(y, x_0) \le \nu_4\varepsilon \le L\nu_\infty\varepsilon$．次に $f(y) = r(f(x_0), y_3) \in W^s_{L\nu_3\varepsilon}(y_3)$ と

$$D(f(y), x_1) \le D(f(y), y_3) + D(y_3, x_1) = D(r(f(x_0), y_3), y_3) + D(x_1, y_3)$$

より $D(f(y), x_1) < (L\nu_3 + \mu L\nu_2)\varepsilon \le (L\nu_\infty + \nu_\infty)\varepsilon$．また

$$D(f^2(y), x_2) \le D(f^2(y), f(y_3)) + D(f(y_3), y_2)) + D(y_2, x_2)$$

と $f^2(y) \in W^s_{\mu L\nu_3\varepsilon}(f(y_3))$ より $D(f^2(y), x_2) < \{L(\mu\nu_3 + \nu_2) + \mu L\nu_1\}\varepsilon \le \{L(\mu+1)\nu_\infty + \nu_\infty\}\varepsilon$．同様にして，$f^2(y) \in W^s_{L(\mu\nu_3+\nu_2)\varepsilon}(y_2)$ と

$$D(f^3(y), x_3) \le D(f^3(y), f(y_2)) + D(f(y_2), y_1) + D(y_1, x_3)$$

より $D(f^3(y), x_3) < \{L(\mu^2\nu_3 + \mu\nu_2 + \nu_1) + \mu L\}\varepsilon \le \{L(\mu^2+\mu+1)\nu_\infty + \nu_\infty\}\varepsilon$．さらに，$f^3(y) \in W^s_{L(\mu^2\nu_3+\mu\nu_2+\nu_1)\varepsilon}(y_1)$ と

$$D(f^4(y), x_4) \le D(f^4(y), f(y_1)) + D(f(y_1), y_0) + D(y_0, x_4),$$

より $D(f^4(y), x_4) < L(\mu^3\nu_3 + \mu^2\nu_2 + \mu\nu_1 + 1)\varepsilon \leq L(\mu^3 + \mu^2 + \mu + 1)\nu_\infty\varepsilon$. 従って $D(f^i(y_4), x_i) < L'\varepsilon$ $(0 \leq \forall i \leq 4)$.

帰納的に $D(f^i(y_k), x_i) < L'\varepsilon$ $(0 \leq i \leq k)$ を満たす $y_k \in X$ を見い出すことができる. k は任意で X はコンパクトであるから, 対角線論法によって結論を導くことができる.

参考文献

[1] R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Lecture Notes in Mathematics 470 (Springer-Verlag, New York, 1975).

[2] A. H. Frink, *Distance functions and the metrization problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 43 (1937), 1408-1411.

[3] K. Hiraide, *Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property*, J. Math. Soc. Japan 40 (1988), 123-137.

[4] Yu. Kifer, *General random perturbations of hyperbolic and expanding transformations*, J. Analyse Math. 47 (1986), 111-150.

[5] 森本明彦, 擬軌道追跡性の方法と力学系の安定性, 東大数学教室セミナリー・ノート 39, Tokyo 1979.

[6] J. Ombach, *Equivalent conditions for hyperbolic coordinates*, Topology and its Appl. 23 (1986), 87-90.

[7] S. Yu. Pilyugin, *Shadowing in Dynamical Systems*, (a book) to appear.

[8] W. L. Reddy, *Expansive canonical coordinates are hyperbolic*, Topology and its Appl. 15 (1983), 205-210.

[9] K. Sakai, *Hyperbolic metrics of expansive homeomorphisms*, Topology and its Appl. 63 (1995), 263-266.

[10] K. Sakai, *Shadowing property and transversality condition*, in: Proceedings of the International Conference on Dynamical Systems and Chaos in Tokyo 1994, vol.1 (World Scientific, Singapore, 1995), 233-238.

[11] K. Sakai, *Shadowing properties of $\mathcal{L}$-hyperbolic homeomorphisms*, preprint.

[12] K. Yano, *Topologically stable homeomorphisms of the circle*, Nagoya Math. J. 79 (1980), 145-149.